



TITLE:

温められた壁面を流れる液層の安定性 (統計流体力学の研究)

AUTHOR(S):

長谷川, 英治

CITATION:

長谷川, 英治. 温められた壁面を流れる液層の安定性 (統計流体力学の研究). 数理解析研究所講究録 1977, 298: 75-82

ISSUE DATE:

1977-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106258>

RIGHT:

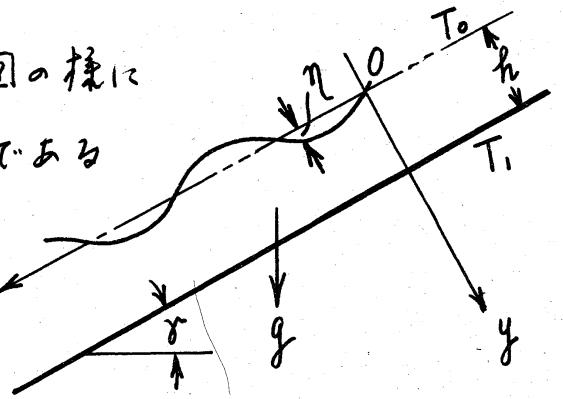
温められた壁面を流れる液層の安定性

慶大 エ 長谷川英治

はじめに、圧延工程での鋼板、硝子の引き出し工程での板硝子等は、高温状態にあるため、水とか油などの液体をそれ等の表面に流し、強制的に冷却されるのが普通である。この様な場合、板の表面が一様に冷されることが製品の管理上望ましい。そのために、表面に沿って流した液体の膜が切れたりしない様に工夫している。現場の人々の経験から、鋼板とか硝子板の温度が比較的高い時の方が温度の低い時よりも膜切れが少ないことが知られている。この事は実験でも確かめられている。⁽¹⁾ これは壁から流体への熱の流れが液層の流れの安定性にかかわりをもつからであろう。すぐ考えられるのは温度勾配による表面張力の変化である。しかし、壁から液層に熱が加えられている時に、液層の表面がゆらいで波が出たものとする、その波の山では温度が下り、谷では上るために、谷から山へと表面張力の差による流れを

生ずる。その結果、ゆらぎは増強され、壁からの加熱は流れを不安定化する。⁽²⁾ 従って、他に原因を求める必要がある。ここでは、流体の熱膨張を考慮して、加熱された液層の流れの安定化の原因の一つを線形の範囲で調べた。

基礎の流れ。 図の様に
 x, y 座標をとる時、温度が T_1 である
 傾斜角 γ の平面壁を流れる
 厚み h の液層の流れの速
 度 U , 圧力 P , 温度 T は、
 流体の熱膨張を考慮した時、



$$U = \frac{g \sin \gamma}{2\nu} \left[(h^2 - y^2) - \frac{\alpha \beta}{3} (h^3 - y^3) \right]$$

$$P = \rho_0 g \cos \gamma \left(y - \frac{\alpha \beta}{2} y^2 \right) + P_0$$

$$T = T_0 + \beta y$$

となる。ここで、 T_0, ρ_0, P_0 : 液層表面での温度、密度、圧力、
 $\beta = (T_1 - T_0)/h$, α : 熱膨張係数, g : 重力加速度, ν : 動粘性係数である。

これらの方程式系 速度、圧力、温度の変動量 (u, v, p, θ) について線形化した、ゆらぎの方程式系は次の様になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \delta \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \delta \cot \gamma \theta, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{dT}{dy} = \frac{1}{Pr R} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right). \end{array} \right.$$

$$y=0: \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\eta = 0,$$

$$\frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{T_e}{R^{5/3}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - p - 2 \frac{\cot \gamma}{R} \eta = 0,$$

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\theta + \eta = 0.$$

$$y=1: \quad u=0, \quad v=0, \quad \theta=0.$$

ここで、長さ h で、速度は温度勾配のない時の自由表面の速度 $\bar{U} = gh^2 \sin \gamma / 2\nu$ で、圧力は $\rho_0 \bar{U}^2$ で、温度は βh で、時間 h/\bar{U} で標準化した。 $R = \bar{U} h / \nu$, $Pr = \nu / \kappa$,

$\delta = 2\alpha(T_1 - T_0)$, η : 自由表面でのゆらぎの大きさ, κ : 温度拡散率である。更に $T_e = \frac{\sigma}{\rho_0} (2/g \sin \gamma \nu^4)^{1/3}$, σ : 表面張力係数である。

そこで、ゆらぎの流れの関数 ψ と温度 θ とを

$$\psi = \phi(y) e^{ik(x-ct)}, \quad \theta = \chi(y) e^{ik(x-ct)}$$

と Fourier 成分表示すれば、上の方程式系は

$$\begin{cases} \phi'''' - 2k^2\phi'' + k^4\phi = ikR\{(\sigma-c)(\phi'' - k^2\phi) - \sigma''\phi\} \\ \quad + \delta(\chi' - ik\omega\gamma\chi), \\ \chi'' - k^2\chi = ikRPr\{(\sigma-c)\chi - T'\phi\} \end{cases},$$

$$y=0: \quad \phi'' + k^2\phi + \frac{2}{\sigma-c}\phi = 0$$

$$\begin{aligned} \phi''' - 3k^2\phi' - ik\left\{R(\sigma-c)\phi' + \left(\frac{T_e}{R^{2/3}}k^2 + 2\omega\gamma\right)\frac{\phi}{\sigma-c}\right\} \\ = \delta\chi \end{aligned}$$

$$\chi - \frac{1}{\sigma-c}\phi = 0$$

$$y=1: \quad \phi = 0, \quad \phi' = 0, \quad \chi = 0$$

となる。

長波長の場合、

エネ ν の方程式を考慮しても

長波長近似は適用出来る。今、 $\phi = \phi_0 + k\phi_1 + \dots$, $\chi = \chi_0 + k\chi_1 + \dots$, $c = c_0 + kc_1 + \dots$ とすれば、第1近似は

$$c_0 = 2 - \frac{3}{8}\delta,$$

$$\phi_0 = (y-1)^2 \left\{ 1 + \frac{\delta}{24}(y^2 - 2y - 5) \right\}$$

$$\chi_0 = y - 1$$

となり、第2近似は

$$C_1 = -i \left[R \left\{ \left(-\frac{8}{15} + \frac{601}{2880} \delta - \frac{1457}{72576} \delta^2 \right) + Pr \left(\frac{35}{4032} \delta - \frac{31}{24192} \delta^2 \right) \right\} + \cot \gamma \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{120} \delta \right) + \frac{1}{3} \frac{Te}{R^{3/2}} k^2 \right]$$

となる。これより、中立曲線の R 軸上での分岐点 R_c は

$$R_c = \frac{\frac{5}{4} \left(1 - \frac{11}{80} \delta \right) \cot \gamma}{1 - \frac{5}{1536} \left(\frac{601}{5} + 5Pr \right) \delta + \frac{5}{64512} \left(\frac{1457}{3} + 31Pr \right) \delta^2}$$

となる。この式の分母は Pr の値と関係なく正の実根をもつ。

$Pr = 6.75$ とすれば、 $\delta = 2.898$ で R_c は無限大となる。 γ が 30° の時の R_c と δ との関係を示したのが図-1 である。

任意の波数の場合、前述の ϕ と χ の方程式系を数値的に解き中立曲線をお求めた。 $Te = 4268.47$, $Pr = 6.75$, $\gamma = 30^\circ$ の場合の結果が図-2, 3 に示してある。 $k-R$ の図より壁から液層を加熱して行くと必ずしも中立曲線 of 分岐点 R_c が臨界レイノルズ数を与えることにはならなくなるが、実際には δ は小さい値しかとりえないため、上で与えた R_c が臨界レイノルズ数を与えるものと考えてよい。($k-R$ の図の右側の右側が不安定領域、左側が安定領域である。)

考察及び結論

上に得られた壁からの加熱による安定化は流れが熱膨脹による浮力で阻止され、もとの流れが図-4の様に変わるためである。そこで臨界レイノルズ数 R_c を平均流速をもとにしたレイノルズ数 R^* で表示した方がよい。臨界レイノルズ数 R_c^* は

$$R_c^* = \frac{\frac{5}{6} \left(1 - \frac{11}{80} \delta\right) \left(1 - \frac{3}{16} \delta\right) \cot \delta}{1 - \frac{5}{1536} \left(\frac{601}{5} + 5P_r\right) \delta + \frac{5}{64512} \left(\frac{1457}{3} + 31P_r\right) \delta^2}$$

となり、 δ が小さい所では R_c^* の性質は分母で決まり、それは R_c と同じ様なものとなる。従って、壁からの液層の加熱は流れを安定化することになる。

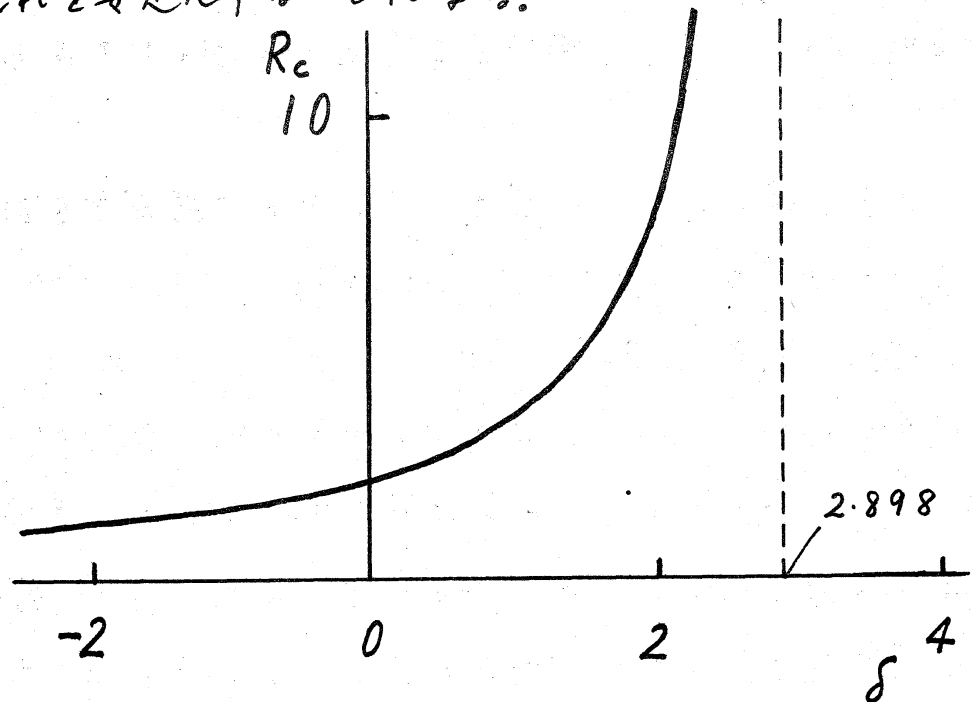
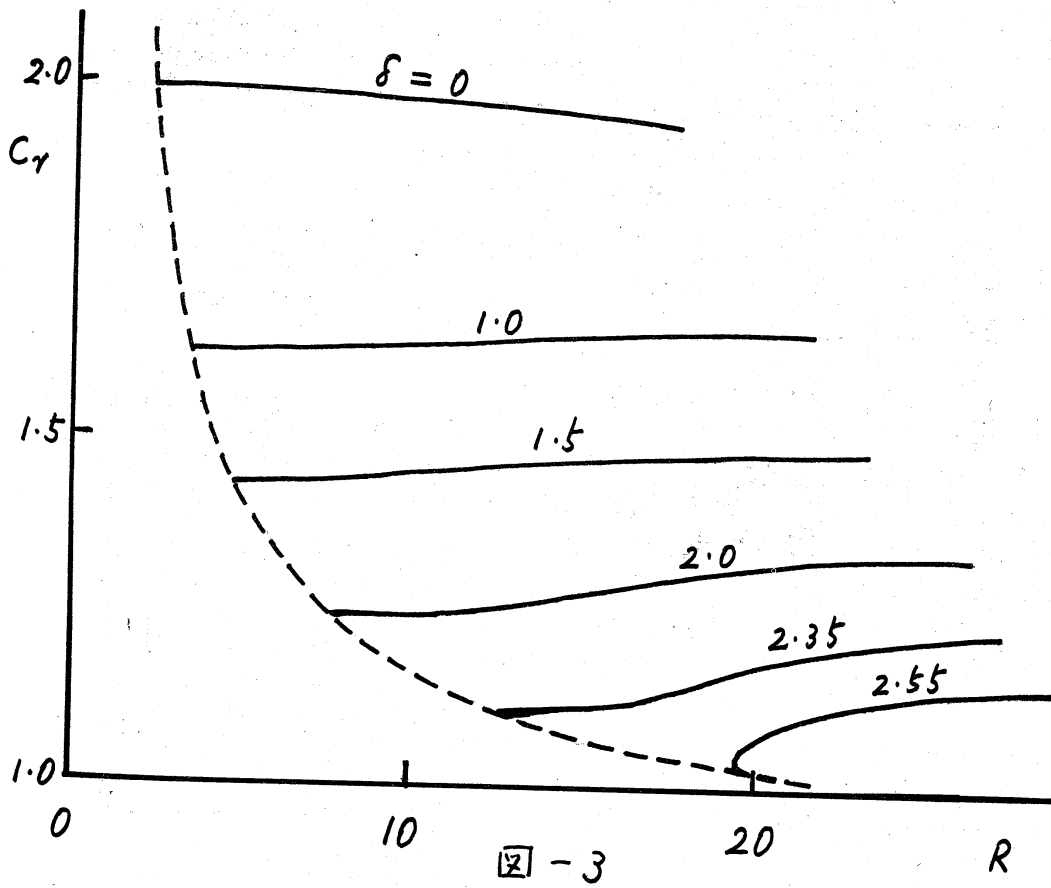
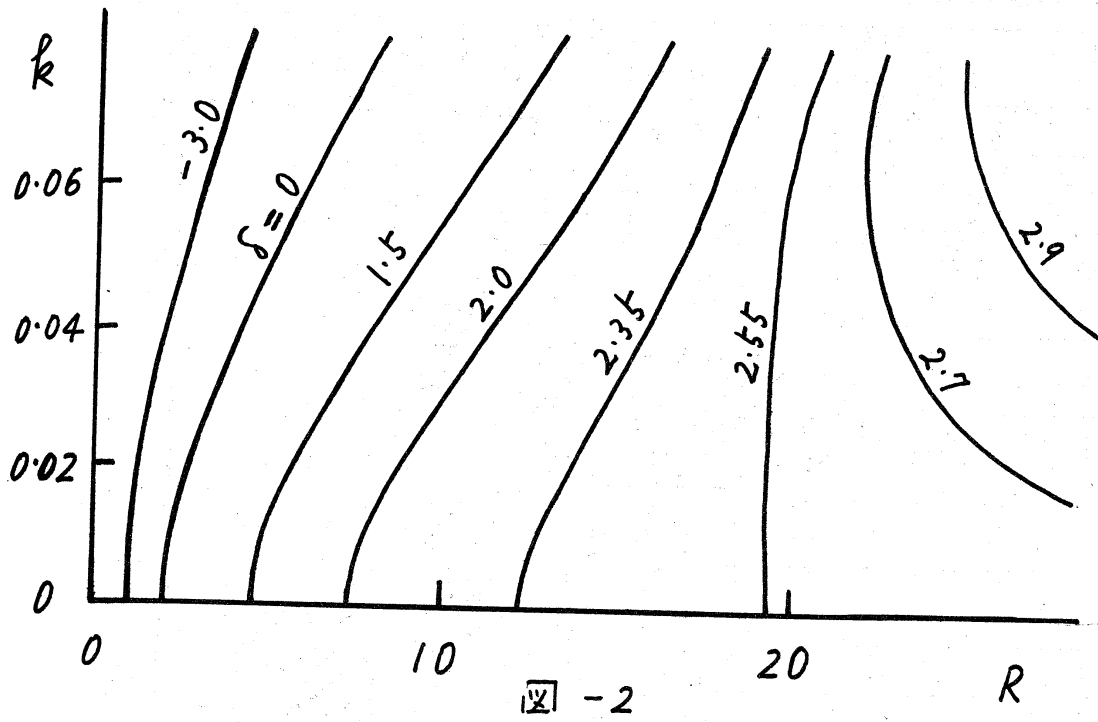


図 - 1



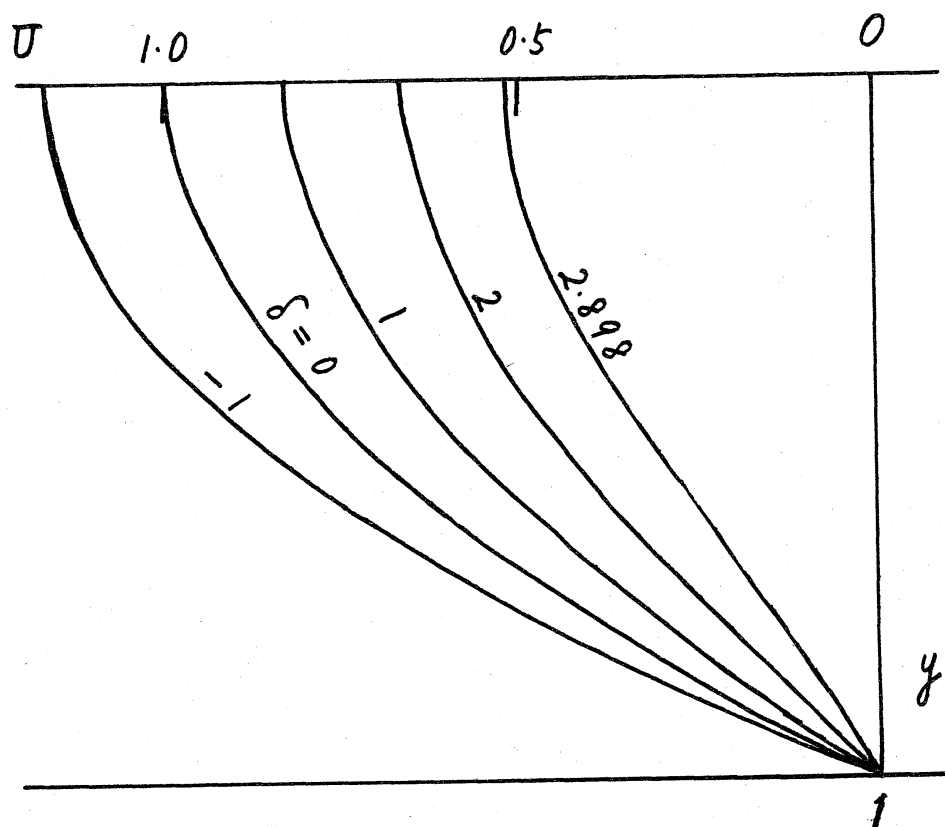


図 - 4

文献 (1) SIMON, F.F. & Hsu, Y.Y. (1970) NASA, TN D-5624

(2) 岩崎, 長谷川, (1977) 第52期核機学会関西支部講演集